UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DEL CONCEPTO DERIVADA

Lucybeth Gutiérrez* - Carmen Valdivé**

*Magister en Matemática, mención Enseñanza de la Matemática. Profesora contratada del Departamento de Técnicas Cuantitativa, Decanato de Administración y Contaduría de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. Barquisimeto, Venezuela. Email: bethlu_7@hotmail.com

**Doctora en Educación. Profesora titular del Decanato de Administración y Contaduría de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. Barquisimeto, Venezuela. Peila Nivel III. Email: valfer16@yahoo.com

RESUMEN

El estudio que se muestra en este artículo tiene como propósito describir la descomposición genética del concepto de derivada bajo la teoría Acción Proceso Objeto Esquema (APOE), perspectiva de la teoría cognitiva denominada Pensamiento Matemático Avanzado. Esta descomposición permite estructurar el concepto matemático, orienta la organización del contenido a enseñar y el diseño de actividades y tareas que contribuyan a la construcción de las estructuras que se busca que los estudiantes desarrollen (Badillo, 2003). Además es el punto de partida para la construcción de unidades didácticas (Asiala et.al, 1996). Los actores sociales objeto de estudio son los libros de texto que utilizan los profesores de Matemática del Departamento de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL-IPB). Los resultados revelan la influencia de tres esquemas en la construcción de los significados del objeto derivada, desde diferentes modos de representación a saber: (1) La derivada de una función en un punto f´(a), (2) El objeto función derivada f´(x), y (3) el operador derivada D(f).

Palabras clave: Derivada, descomposición genética, teoría APOE.

Recibido: 17/02/2012 - Corregido: 28/08/2012 - Aprobado: 11/10/2012

A GENETIC DECOMPOSITION OF THE DERIVATIVE CONCEPT

Lucybeth Gutiérrez* - Carmen Valdivé**

*Master in Mathematics, Mathematics Teaching mention. Professor at Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. Barquisimeto, Venezuela. Email: bethlu_7@hotmail.com
**PhD in Education. Professor at Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. Barquisimeto, Venezuela. Email: valfer16@yahoo.com

ABSTRACT

The study shown in this article is intended to describe the genetic decomposition of the concept of derivative under the action process object schema theory (APOE), perspective of the cognitive theory called advanced mathematics thinking. This decomposition allows to structure the mathematical concept, directs the organization of content to be taught and the design of activities and tasks that contribute to the construction of the structures for students to develop (Badillo, 2003). It is also the starting point for the construction of teaching units (Asiala et.al, 1996). Social actors subject to study are textbooks used by the professors of mathematics of the Mathematics Department of the Libertador Pedagogical Experimental University (UPEL-IPB). The results reveal the influence of three schemes in the construction of the meanings of the derivative object, from different modes of representation as follows: (1) The derivative of a function at a point f '(a), (2) The derivative function object f`(x), and (3) the derivative operator D(f).

Key words: Derivative, genetic decomposition, APOE theory.

UMA DECOMPOSIÇÃO GENÉTICA DO CONCEITO DE DERIVADA

Lucybeth Gutiérrez* - Carmen Valdivé**

*Mestre em Matemática, menção Ensino da Matemática. Professor da Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. Barquisimeto, Venezuela. Email: bethlu_7@hotmail.com
**Doutora em Educação. Professor da Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. Barquisimeto, Venezuela. Email: valfer16@yahoo.com

RESUMO

O estudo tem como objetivo descrever a decomposição genética do conceito de derivada sob a teoria Ação Processo Objeto Esquema (APOE), perspectiva da teoria cognitiva denominada Pensamento Matemático Avançado. Esta decomposição permite estruturar o conceito matemático, orienta a organização do conteúdo a ensinar e o projeto de atividades e tarefas que contribuem à construção das estruturas, que se busca que os estudantes desenvolvam (Badillo, 2003). Além de que é o ponto de partida para a construção de unidades didáticas (Asiala et.al, 1996). Os atores sociais objeto de estudo são os livros de texto que utilizam os professores de Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Pedagógica Experimental Libertador (UPEL-IPB). Os resultados revelam a influencia de três esquemas na construção dos significados do objeto derivada, desde diferentes modos de representação: (1) A derivada de uma função em um ponto f(a), (2) O objeto função derivada f(x), e (3) O operador derivada D(f).

Palavras chave: Derivada, decomposição genética, teoria APOE.

La problemática

El análisis de la comprensión de un concepto en Matemática juega un papel primordial para el didactista ya que contribuye en mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, y permite develar los procesos cognitivos que se activan en los estudiantes para encapsular un concepto. La comprensión del concepto de derivada ha sido abordado por diferentes investigadores desde distintos planteamientos (Asiala, Cottrill y Dubinsky, 1997; Aspinwall, Shaw y Presmeg, 1997; Azcárate, 1990; Badillo, 2003; Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006; Orton, 1983. Las investigaciones muestran la existencia de conflictos e inconsistencias entre las construcciones realizadas por los estudiantes y los significados formales presentados por los libros de texto y la influencia en los modos de representación gráfico y analítico en la construcción de los significados por parte de los estudiantes, la influencia de los contextos (Azcárate, 1990), y la importancia de la relación entre la noción de derivada en un punto (f '(a)) y la función derivada (f '(x)) (Baker et al., 2000; Badillo, 2003). Además se han identificado dificultades referidas a la comprensión de la diferenciación y a la gráfica asociada a las variaciones de los valores de las variables de cambio (Orton, 1983).

Estas investigaciones han suministrado información sobre las características de la comprensión del concepto de derivada en los estudiantes, y han empezado a proporcionar indicadores de cómo se desarrolla esa comprensión.

En la praxis se evidencia que los estudiantes en muchos casos desconocen la definición de derivada y sus diversas representaciones; no comprenden problemas relacionados con razón de cambio, y presentan conflictos cognitivos entre los esquemas conceptuales asociados a la definición, sin embargo, resuelven ejercicios usando técnicas de derivación (Orton, 1980; Tall, 1986; Artigue, 1991; Kendal y Stacey, 2000; Ubuz y Kirkpinar; 2000; Badillo, 2003).

Las dificultades de los estudiantes en relacionar el modo gráfico y el modo analítico también se ponen de manifiesto cuando, en contextos eminentemente gráficos, los estudiantes solicitan al docente, la expresión analítica de la función para resolver determinadas cuestiones (Asiala et al., 1997).

El comportamiento de los estudiantes ante aspectos característicos de las funciones, como la existencia de puntos extremos, tangentes verticales, cambios en las condiciones de continuidad, características de la comprensión de la segunda derivada, pueden ser consideradas indicadores de la comprensión de los estudiantes (Asiala et al., 1997; Azcárate, 1990; Badillo, 2003; Baker et al., 2000; Ferrini-Mundy y Graham, 1994, Orton, 1983).

Artigue (1995) señala que, aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de manera más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, existen dificultades para que los jóvenes logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y activen procesos de pensamiento que conforman el centro del Análisis Matemático.

La derivada es un objeto matemático que dificulta la comprensión de otros conceptos que lo involucran. Varios autores han estudiado esta problemática desde el plano cognitivo. Es un límite, lo que hace que sea muy complejo y de difícil comprensión para los estudiantes (Sierpinska, 1985,1987; Cornú, 1991).

En tal sentido, estudiar la descomposición genética de un objeto matemático, en particular el de derivada, permite estructurar el concepto y orientar la organización del contenido a enseñar y el diseño de actividades y tareas que contribuyan a la construcción de las estructuras que se busca que los estudiantes desarrollen. Además es el punto de partida para la construcción de unidades didáctica (Badillo, 2003; Asiala et. al., 1996, entre otros).

La descomposición genética según Badillo y Azcarate (2002) introduce al profesor en una reflexión epistemológica y didáctica del concepto, que permite, cuestionar y mejorar la comprensión que tiene del concepto, usar y organizar dicho conocimiento en la estructuración de la enseñanza del mismo, orientar el aprendizaje de los estudiantes hacia los procesos de construcción y reconstrucción de los conceptos matemáticos que espera que sus estudiantes desarrollen.

En vista de los planteamientos anteriores, el estudio que se muestra en este manuscrito muestra cómo los libros de textos llegan a la construcción del concepto de derivada; es decir, analizar, la evolución de este concepto (hasta llegar a la definición formal) a través de su descomposición genética.

La teoría acción proceso objeto esquema (APOE)

Dubinsky y colaboradores (citado por Badillo, 2003) desarrollan una perspectiva teórica llamada APOE, que tiene sus bases en la teoría piagetiana constructivista y en sus ideas relacionadas con la abstracción reflexiva aplicadas en el estudio cualitativo del desarrollo del pensamiento matemático avanzado.

Badillo (2003) plantea que la teoría APOE en muchos casos se ha usado para describir e interpretar el desarrollo de un concepto en la mente de los estudiantes en el nivel preuniversitario. En otros casos, el análisis de la información ha conducido a la revisión de la descomposición genética (conjunto estructurado de constructos mentales, los cuales pueden describir cómo el concepto puede ser desarrollado en la mente de un individuo). De igual forma, del resultado de muchos análisis específicos han logrado definir operativamente los constructos acción, proceso y objeto. Badillo también señala que los estudios actuales de Mc.Donald sobre el desarrollo del esquema del concepto sucesión, han develado que la teoría involucrando las perspectivas acción, proceso y objeto era insuficiente y no adecuada para analizar la información sobre la comprensión de los estudiantes cuando los conceptos eran considerados como esquemas, pero que la triada intra, inter y trans, sugerida por Piaget y García (1982): es útil en los niveles de comprensión. Según Dubinsky, con el aporte de Mc.Donald sobre los esquemas, la teoría se ha enriquecido y potencializado.

A continuación se explican los elementos de la teoría APOE según Dubinsky (citado por Badillo, 2003):

Acciones: define "la acción como una transformación de objetos que el sujeto percibe como algo externo" (p. 42).

Procesos: "cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, ésta puede interiorizarse en un proceso" (p. 44).

Objetos: "cuando un sujeto reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones. Entonces está pensando en este proceso como objeto" (p. 45). En este caso decimos que el proceso se ha encapsulado en un objeto.

Dubinsky (1991, p.p. 45-46) consideró la encapsulación de procesos como objetos. Para el autor, es la transformación mental de un proceso, el cual ha interiorizado una acción en un objeto cognitivo.

Esquemas: una vez construidos, objetos y procesos pueden ser interconectados de varias formas: por ejemplo, dos o más procesos pueden ser coordinados ligándolos (a través de la composición u otra formas); procesos y objetos se relacionan en virtud de que el primero actúa sobre el segundo. Una colección de procesos y objetos puede ser organizada en una manera estructurada para formar esquema. Un esquema de un individuo para un tópico matemático, es la totalidad de su conocimiento conectado consciente o inconscientemente a este tópico.

Badillo (ob. cit.) cita que Piaget y García proponen que el crecimiento conceptual está determinado por un mecanismo seguro y este envuelve tres niveles o etapas, que denominaron tríada. Los niveles en la tríada ocurren en un orden fijo y son intra, inter y trans. Según Baker (citado por Badillo, 2003), estos niveles son:

Nivel Intra: plantea que en este nivel los eventos particulares u objetos son analizados en términos de sus propiedades las explicaciones en este nivel son locales y particulares. Un objeto en el nivel intra no puede ser reconocido por el estudiante como debería ser y su forma es similar a la de una generalización simple.

Nivel Inter: explica que los estudiantes usan, comparan y reflexionan sobre ideas que ellos tienen aisladas y esto les lleva a construir relaciones y transformaciones.

Nivel Trans: explica que el estudiante reflexiona sobre estas coordinaciones y relaciones desarrollando nuevas estructuras. A través de la síntesis de las transformaciones en el nivel inter, el estudiante construye y tiene conciencia de que el esquema está completo, y puede recibir nuevas propiedades globales que eran inaccesibles en otros niveles anteriores.

Los estudiantes parten de la reflexión para construir sus conocimientos, siguiendo una serie de eslabones a través de experiencias que le permiten enriquecer sus esquemas hasta llegar a la definición formal o no de un objeto matemático. La teoría APOE brinda una serie de herramientas que permiten analizar los procesos cognitivos activados por los estudiantes para comprender un concepto matemático, en especial uno de estos conceptos es el de derivada. El objetivo que se pretende abordar es cómo los estudiantes encapsulan la definición de la derivada, y cómo esta teoría servirá para la investigación, permitirá estudiar el desarrollo del concepto en la mente de los estudiantes.

La descomposición genética de un concepto matemático

La investigación se enmarca dentro de la Teoría APOE. Esta teoría propone la búsqueda de la reflexión por parte de los individuos a la hora de aprender y comprender los conceptos matemáticos más que la memorización acrítica de técnicas y algoritmos independientemente del grado de sofisticación que tengan estos, Badillo (2003).

La descomposición genética según Badillo (2003), es el eje de la aplicación de la Teoría APOE en estudios sobre la comprensión de objetos matemáticos porque permite estructurar el concepto matemático, orienta la organización del contenido a enseñar y el diseño de actividades y tareas que contribuyan a la construcción de las estructuras que se busca que los estudiantes desarrollen. Además es el punto de partida para la construcción de unidades didácticas.

Asiala et.al (1996), plantea que la descomposición genética de un concepto matemático es un conjunto estructurado de constructos mentales, los cuales pueden describir cómo el concepto puede ser desarrollado en la mente del individuo.

Badillo y Azcarate (2002) señalan que la descomposición genética introduce al profesor en una reflexión epistemológica y didáctica del concepto, que permite, cuestionar y mejorar la comprensión que tiene del concepto, usar y organizar dicho conocimiento en la estructuración de la enseñanza del mismo, orientar el aprendizaje de los estudiantes hacia los procesos de construcción y reconstrucción de los conceptos matemáticos que espera que sus estudiantes desarrollen.

Azcárate y Camacho (2003) sugieren que para la elaboración de una propuesta de una descomposición genética determinada, se considera que la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales, previamente construidos, para formar acciones;

entonces las acciones se interiorizan para formar procesos, los cuales se encapsulan para formar objetos. A su vez los objetos pueden ser des-encapsulados hacia los procesos a partir de los cuales fueron formados. Finalmente las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas. Las construcciones son las Acciones, los Procesos, los Objetos y los Esquemas, mientras que los mecanismos para hacer esas construcciones son las siguientes: interiorización, coordinaciones, reversiones, encapsulaciones y des-encapsulaciones. En definitiva, con los conceptos de acción, proceso, objeto, esquema y los mecanismos de construcción se describe lo que se denomina la descomposición genética de un concepto.

En el estudio que se muestra, la descomposición genética será un pilar fundamental puesto que permitirá hacer un análisis teórico del objeto matemático, y activará la reflexión por parte de los docentes en función de mejorar y orientar su actuación en las aulas de clases desde el punto de vista cognitivo y didáctico.

Azcarate (1990) apoyándose en los trabajos del Group Zero postula que la comprensión de la derivada implica una comprensión previa de unos conceptos, entre estos señala la velocidad media e instantánea, tasa media de variación y pendiente de una recta.

Asiala, Dubinsky, Cottrill y Schwingendorf (1997), en un estudio sobre la comprensión grafica del objeto derivada en un punto realizaron la presente descomposición:

1. Conocimiento Prerrequisito

2. Caminos gráficos y analíticos hacia la derivada

3. Interpretación gráfica de la derivada

4. Uso del concepto derivada

Badillo (2003), en su tesis doctoral “la derivada como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia”, expone una descomposición genética basándose en la propuesta por Asiala y otros (1997), donde incluye el objeto función derivada. Esta descomposición contiene cuatro apartados donde incorpora nuevos elementos.

Metodología

El estudio está enmarcado en uno de tipo cualitativo. Es de carácter descriptivo, interpretativo y documental. Es de carácter interpretativo, dado que se estudian a los actores, respetando sus actuaciones, puntos de vistas para poder encontrar elementos que permitan determinar las dificultades que se presentan en una situación matemática (Hernández, Fernández y Batista, 2006). Es documental y descriptivo porque permite detallar los esquemas en la construcción de los significados del objeto derivada con el apoyo, principalmente, en trabajos previos, informaciones y documentos divulgados por medios impresos y electrónicos (UPEL 2006).

Los actores sociales son los libros los cuales han llegado a ser considerados como instrumentos cuasi-observables que en cierto modo reemplazan al observador y al entrevistador en situaciones inaccesibles (Woods, 1987). Para el estudio de los esquemas en la construcción de los significados del objeto derivada se utilizan las siguientes fuentes: Ceder y Outcalt (1975); Stancl y Stancl (1987); Ross (1980); Leithold (1996); y Sáenz (2005).

La metodología de recolección y análisis de la información se desarrolla a través de cuatro actividades, acordes con el método inductivo, siguiendo lo propuesto por Rodríguez, Gil y García (1999) y en concordancia a la metodología propuesta por Valdivé y Garbin (2008).

Actividades de análisis

Fragmentación de la información

Se redujo la información haciendo una reconstrucción teórica provisoria de la definición de derivada, considerándose para ello tres esquemas resaltantes como se explicita en la sección anterior. La información se separa en unidades de análisis (segmentos relevantes y significativos) tal como lo propone Valdivé (2008; p. 110).

Identificación y clasificación de las unidades de análisis

Se examina cada unidad de análisis para identificar en ellas, componentes temáticos que permitan clasificarlas en una u otra categoría Valdivé (2008, p 113). Ubicar los elementos en el esquema respectivo.

Disposición y organización de la información

Para el análisis se sitúan y transforman los esquemas en un conjunto organizado de información, presentándolos en forma de matriz. Luego se categoriza utilizando la descomposición genética propuesta por los autores Badillo (2003), en su tesis doctoral “la derivada como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia”, y la de Asiala y otros (1997). Ésta última presenta procesos y producto, relaciones y agrupamientos conceptuales Valdivé (2008, p. 113).

Descripción estructurada: Los hallazgos.

La descripción y los hallazgos se detallan en el siguiente apartado.

Hallazgos

En este aparado se presenta la descripción y análisis de los tres esquemas determinados en la descomposición genética del concepto derivada, separándose como sigue: (1) la derivada de una función en un punto, (2) el objeto función derivada y (3) la derivada como tasa de cambio instantánea.

Descomposición genética del objeto derivada a partir de los libros de texto.

En la investigación se toman como referencia las descomposiciones de Badillo (2003), y Asiala y otros (1997), debido a que nos interesan todos los aspectos relacionados con la definición de derivada. Se analizan tres conceptos la derivada de la función en un punto $f'(a)$, función derivada $f'(x)$, y el operador derivada D(f).

I. Conocimientos prerrequisitos.

1. Representación gráfica de objetos matemáticos.
   1.1. Representación gráfica de un punto.
   1.2. Representación gráfica de una recta.
2. Coordinación de representaciones de puntos con una función.
   2.1. Interpretación gráfica de (x,y), cuando y es dada por la ecuación de $f(x)$.
   2.2. Interpretación de (x,y), cuando y es dada por la gráfica de $f(x)$.
   2.3. Superar la necesidad de tener una fórmula para interpretar toda la función.

3. Coordinar los diferentes tipos de continuidad de una función.
   3.1. Continuidad en un punto.
   3.2. Discontinuidad en un punto.
      3.2.1. Discontinuidad removible.
      3.2.2. Discontinuidad esencial.
   3.3. Continuidad en un intervalo.
4. Coordinación y traducción de las diferentes representaciones de funciones.
5. Coordinación de representaciones del concepto de pendiente de una recta.

II. Rutas gráficas y analíticas para la función derivada

A continuación se presenta una descomposición genética. Los aspectos generales se identifican con números romanos, los subtítulos referentes a cada aspecto general con números del 1 al 10. Con respecto al aspecto general II, se denotaran las acciones, interiorización y encapsulación, con los números 1,2 y 3, respectivamente, además usaremos letras, la a para indicar lo gráfico-analítico, y, la b para referirnos a lo algebraico- numérico.

1a. Gráfico-analítico: la acción de conectar dos puntos sobre una curva para formar una cuerda que es una porción de la secante a través de los dos puntos, junto con la acción de calcular la pendiente de la recta secante a través de los dos puntos

1b. Algebraico- numérico: la acción de calcular la tasa media de variación calculando entre un punto y otro punto próximo.

2a. Gráfico-analítico: interiorización a través de las acciones del punto 1a en un proceso único a medida que los dos puntos del gráfico se aproxima más y más.

2b. Algebraico-numérico: interiorización de las acciones para calcular la tasa media de variación $m = \nabla = TMV = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, cuando b→ a, en un proceso único a medida que la diferencia entre los dos puntos (b y a) la diferencia se hace más pequeña, esto es, a medida que la longitud del intervalo se acerca más y más a cero.

3a. Gráfico-analítico: encapsulación del proceso 2a para producir la recta tangente como la posición límite de las secantes, y para producir la pendiente de la tangente en un punto sobre la gráfica de una función continua en ese punto.

3b. Algebraico- numérico: encapsulación del proceso 2b, de calcular las tasas medias de variación $m = \nabla = TMV = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, cuando b→a, para producir la tasa de variación instantánea con una variable respecto de la otra como el $\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

4. Coordinar las diferentes interpretaciones de la tasa instantánea de variación

   4.1. El valor de la pendiente de la recta tangente como el límite del cociente diferencial.

   4.2. La velocidad instantánea, el ejemplo más sencillo de la tasa instantánea de variación, como el límite de la velocidad media.

   4.3. Las razones de cambio de funciones que dependen del tiempo, como el límite del cociente de las tasas medias.

   4.4. Las razones de cambio de funciones que dependen de una magnitud cualquiera, como el límite del cociente de las tasas medias.

5. Encapsulación de los procesos 2a y 2b para producir la definición de la derivada de una función que es continua en un punto, como el límite del cociente incremental en ese punto.

6. Coordinación de los procesos 2a y 2b en varias situaciones relacionadas con la derivada de una función en un punto, presentadas en diferentes contextos.

7. Interiorización de la derivada en un punto en el proceso de construir la función derivada *f '(x)*, la cual toma como entrada el punto *x* y produce en la salida el valor de *f '(x)*, que es valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, para cualquier *x* del dominio de la función, si el límite existe.

8. Encapsulación del proceso del punto 7 para producir la función derivada *f '(x)* como un nuevo objeto complejo (que implica el proceso de síntesis del objeto derivada en un punto).

III. Interpretación gráfica del objeto *f '(x)*

1. Interpretación gráfica de la derivada en un punto.

   1.1. Superar la necesidad de diferenciar una formula o expresión simbólica. Coordinar varias interpretaciones de *f '(a).*

      1.1.1. Como el límite del cociente incremental en un punto dado.

1.1.2. Como el valor de la pendiente de la recta tangente en un punto dado.

1.1.3. Como el valor de la velocidad instantánea en un instante dado.

1.1.4. Como la razón de cambio entre magnitudes que dependen del tiempo en un instante dado.

1.1.5. Como la razón de cambio entre dos magnitudes cualesquiera en un punto dado.

2. Interpretación gráfica de la derivada como función.

2.1 Coordinar varias interpretaciones de la función derivada.

2.1.2. La función derivada como la función límite del cociente incremental (tasa media de variación) de una función en todos los puntos del dominio.

2.1.2. La función derivada como una nueva función que hace corresponder a cada abscisa x del dominio de la función, el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto (x, f(x)).

2.1.3. La función derivada como la función límite de las razones de cambio entre magnitudes.

2.2. Traducción entre representaciones del concepto función y función derivada y relación entre representaciones de los conceptos de función y función derivada (tabla, gráfica, descripción verbal, expresión simbólica) en el cálculo de la función derivada presentada en diferentes contextos.

IV. Aplicaciones del objeto *f '(x)*

1. Coordinación de varios procesos para obtener la gráfica de f(x).

1.1. Interpretación gráfica de f(x) para un determinado x del dominio de f(x).

1.2. Interpretación gráfica de f '(x) para un determinado x como el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva.

1.3. Proceso de mover x a través de un intervalo.

1.3.1. Monotonía de la función y signo de la primera derivada.

1.3.2. Pendiente infinita (tangente vertical) y derivada infinita.

1.3.3. Concavidad de la función y signo de la segunda derivada.

1.4. Dibujar una gráfica completa o representativa de f(x).

2. Generalización de la función derivada como la razón de cambio relacionadas.

2.1. Aplicación en la interpretación y resolución de problemas de optimización (Geometría).

2.2. Aplicación en la interpretación y resolución de problemas de Mecánica Clásica (Física).

2.3. Aplicación en la interpretación y resolución de problemas de crecimiento y decrecimiento de magnitudes (Bilogía, Economía, etc.).

V. El Operador *Dx (f)*

1. Coordinar la interpretación de *Dx (f)* como un operador lineal.

2. Traducción entre el concepto de operador lineal *Dx* y funciones de la forma

f(x) =mx+b "funciones lineales".

3. Coordinar la interpretación de *Dx(f)* como *f ' y Dxf=f '(x).*

A modo de conclusión

La descomposición genética de la definición de derivada fue generada a partir de la revisión de la literatura, el análisis de libros de textos usados en las universidades locales (significado institucional), el análisis epistemológico del concepto (desarrollo histórico) y la experiencia como profesores de los autores de la investigación. Establece unos elementos que los estudiantes deben construir como conocimientos previos para lograr la comprensión de este objeto matemático, seguido de las rutas gráficas y analíticas para la función derivada lo que permitirá comprender la interpretación gráfica del objeto f '(x) y entender sus diferentes aplicaciones.

Esta descomposición permite reflexionar sobre el cómo explicar y desarrollar la definición de derivada en clases para activar en los estudiantes procesos tales como reflexión, abstracción, síntesis, y generalización, que generan la encapsulación de la definición. Así mismo, contribuye a conocer las características de la comprensión del concepto.

Finalmente, se han encontrado tres esquemas. El primero, permite saber si el estudiante reconoce que la derivada en un punto es un número real, mientras que en el segundo el estudiante puede diferenciar con relación al primero y concluir que la derivada de una función es otra función cuyo dominio serán todos aquellos valores para los cuales $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ exista. El último esquema permite que el estudiante comprenda que el operador D(f) es un operador lineal y es una notación de la derivada.

Bibliografía

Artigue, Michéle (1991). "Analysis". En Tall, David (Editor): Advanced Mathematical Thinking, (pp. 167-198). Dordrech, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Artigue, Michéle (1995). "La enseñanza de los Principios del Cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos". En Gómez, Pedro (Editor): Ingeniería Didáctica en educación Matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Asiala, Mac; Brown, Albert; Devries, David; Dubinsky, Ed; Down, Mathews y Kline, Thomas. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. Research in Collegiate Mathematics Education II CBMS Issues in Mathematics Education. pp. 1- 32.

Asiala M, Cottrill J.; Dubinsky, Ed; y Schwingendorf, K. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivate. Journal of Mathematical Behavior. pp. 399-431.

Aspinwall, Luis; Shaw, Katty y Presmeg, Nurt. (1997). Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivate. Educational Studies in Mathematics. pp. 301-317.

Azcárate, Carmen. (1990). La velocidad: introducción al concepto de derivada. Tesis doctoral. Universitat Autónoma de Barcelona, España.

Azcárate, Carmen y Camacho, Matías. (2003). "Sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático". Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol: X, Nro 2. pp. 135-149.

Badillo, Edelmira y Azcárate, Carmen. (2000). Conocimiento profesional de profesores de Matemática de secundaria. Las relaciones entre Derivada y Velocidad en la enseñanza del Cálculo Diferencial. Primeres Jornades d'Educació Matemática de Catalunya, Mataró Barcelona.

Badillo, Edelmira (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia. Tesis de Doctorado. Universitat Autónoma de Barcelona, España.

Baker, Bryan; Cooley, Louis y Trigueros, María (2000). A calculus graphing schema. The Journal for Research in Mathematics Education, 31 (5), pp. 557-578.

Bruner, Jerome (1966). Studies in cognitive growth. New York: John Wiley.

Ceder, Jack y Outcalt, David. (1975). A Short Course in Calculus. Versión Española de la Segunda Edición de la Obra. Colombia: Fondo Educativo Interamericano.

Cornú, Bernard (1991). “Limits”. En David Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking. 1, 153-166. Dordrech, Boston, London: Academic Prés.

Dreyfus, Tommy (1990). En Tall, David (Editor), Advanced Mathematical Thinking (pp. 25-41). Dordrech, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, Tommy (1991). “Advanced mathematical thinking processes”. En Tall, David. (Editor), Advanced Mathematical Thinking, (pp. 3–21). Dordrech, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, Ed (1991). “Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking”. En D. Tall(Ed) Advanced Mathematical Thinking (pp. 95 – 123). Dordrech, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Hernández, Roberto; Fernández, Carlos y Baptista, Pilar. (2006). Metodología de la Investigación. México.Editorial Mc Graw Hill.

Ferrini-Mundy, Jhon y Graham, Karly (1994). Research in calculus learning. Understanding limits, derivates, and integrals. In Dubinsky y Kaput (Eds.), Research issues in undergraduate Mathematics Learning, pp. 31- 45.

González, Fernando (2000). Investigación Cualitativa en Psicología. México: International Thomson Editores.

Kendal, Michel y Stacey, Kaye (2000). Acquiring the concept of derivative: Teaching and learning with representations and CAS. In T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), Proceedings of the 24th PME International Conference, 3, 127-134.

Leithold, Louis (1996). El Cálculo con Geometría Analítica. México: Ediciones Harla.

Orton, Antony (1980). A crss-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and Young adults, unùblished PhD. Thesis, Leeds University, U.K.

Orton, Antony (1983). Students' understanding of differentiation. . Educational Studies in Mathematics Vol 14, pp. 235 - 250.

Piaget, Jean (1947). La Psicología de la inteligencia. Buenos Aires: Psique.

Piaget, Jean y García, R. (1982). Psicogénesis e Historia de la Ciencia. México: Siglo XXI Editores.

Rodríguez, Gregorio; Gil, Javier y García, Eduardo (1999). Metodología de la Investigación Cualitativa. Málaga, España. Ediciones Aljibe.

Ross, Kenneth (1980). Elementary Analysis: The Theory Of Calculus. United States of America: Editorial Board.

Sáenz, Jorge (2005). Cálculo Diferencial con Funciones Trascendentes Tempranas para Ciencias e Ingeniería. Barquisimeto, Venezuela: Editorial Hipotenusa.

Sánchez-Matamoros, Gloria; García, Mercedes y Llinares, Salvador (2006). El desarrollo del esquema de derivada. Enseñanza de las Ciencias, 24 (1), pp. 85-98.

Sierpinska, Anna (1985). La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des mathématiques. Actes de la 37e Rencontre CIEAEM, 73-95. Leiden.

Sierpinska, Anna (1987). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. Recherches en Didactiqué de Mathématiques, 6(1), 5-67.

Stancl, Donald y Stancl, Mildred (1987). Real Analysis With Point- Set Topology. United States of America: Editorial Board.

Tall, David (1986). Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using Interactive Computer Graphics (Ph.D.). Thesis available from the Mathematical Education Researt Centre, University of Warwich, Coventry CV 4 7AL, U.K..

Tall, David (1991).The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall(Ed) Advanced Mathematical Thinking (pp 3-20). Dordrech, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Tall, David (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. Actas del PME 19 (volumen 1, pp.61-72).

Tall, David y Vinner, Shlomo (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits y continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, pp. 151-169.

Ubuz, Behiye y Kirkpinar, Burcu (2000). Factors contributing to learning of Calculus. In T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), Proceedings of the 24th PME International Conference, 4, pp. 241-248.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador - UPEL (2006). Manual de Trabajos de Grado de Especialización y Maestría y Tesis Doctorales. Caracas – Venezuela.

Valdivé, Carmen y Garbin, Sabrina (2008). Estudio de los Esquemas Conceptuales Epistemológicos Asociados a la Evolución histórica de la Noción de Infinitesimal. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, Relime, 11(3): 413-450.

Valdivé, Carmen (2008). Estudio de los Esquemas Conceptuales Asociados a la Noción de Infinitesimal y su Evolución en Estudiantes de Análisis Matemático. Tesis Doctoral. Doctorado Interinstitucional en Educación UCLA-UNEXPO-UPEL.

Woods, Peter (1987). La escuela por dentro. La Etnografía en la Investigación Educativa. Barcelona: Paidos.